フッサールの数理哲学（６） ： 公理系の「特種化」

その他（別言語等）のタイトル	Husserls Philosophie der Mathematik 6 : Spezialisirung des Axiomen-System Husserl's philosophy of Mathematics 6 : 'Specialization' of an axiom-system
著者	二宮　公太郎
雑誌名	室蘭工業大学紀要
巻	52
ページ	69-80
発行年	2002-11-30
URL	http://hdl.handle.net/10258/100

室工大紀要第52号(2002)69～80

フッサールの数理哲学(6)
－公理系の「特種化」－

二宮　公太郎*1

Husserls Philosophie der Mathematik 6
－Spezialisirung des Axiomen- System－

Kohtaroh NINOMIYA

(原稿受付日　平成14年5月7日　　論文受理日　平成14年8月30日)

Kurtzfassung

Diese Abhandlung betracht verschiedene Modifizierungen des Axiomensystems von Husserls Theorie des Axiomensystems. Unter der Modifizierung des Axiomensystems unterscheidet er die Spezialisierung und die Ersetzung desselben. Für beiden ist die Erweiterung des Gebietes die wichitige Moment . Die Spezialisierung des Axiomensystems bedeutet bei ihm die Erweiterung desselben. Husserl hat die besondere Interesse an die Innere Spezialisierung, dh. die Spezialisierung durch Zusetzungen nicht der Operationen oder Beziehungen selbst sondern der subordinierten Gesetze.

Schlüsselworte : Erweiterung des Axiomensystems, Modifizierung, Spezialisierung, Ersetzung, subordinierte Gesetze , Erweiterung des Gebietes, Phänomenologie

1．はじめに

表題に在る公理系の「特種化」とは、公理系の「拡張」を意味するフッサール固有の表現である。

我々が数領域を拡張するとき、公理系もまた拡張されるのが普通である。しかし、領域の拡張が必ず公理系の拡張によって媒介されなければならない、という訳ではない。例えば、我々が、数領域を実数から複素数へと拡張する場合、＜二実数の順序対＞という形式を取った際の複素数の公理系は、もとの実数の公理系を単に「拡張」したものではあり得ず、これら二つの公理系の関係は、「置き換え」として把握されなければならない。それならば、＜虚数単位ｉ＞を導入する形式を取った際の複素数の公理系では、どうだろうか？　また、その際に、ヒルベルトに代表される数学者とフッサールとで、扱い方は同じなのだろうか？　そもそも、フッサールは、公理系の拡張ということを、どのような構造によって考えていたのだろうか？

このような問題を念頭に置きつつ、本稿は、フッサールの『数理哲学草稿』(1) に残された公理系の「変様」に関する彼の理論を、考察する。公理系の「変様」は、最も一般的な概念であり、公理系の拡張の他に、公理系の置き換えも含む。また、公理系の変様は、必ず領域の拡張に伴わなければならない、という訳でもない。フッサールは、公理系変様の諸場合を、彼に特有の緻密な思考を通して、様々に異なった視点から、分類・区分している。このような包括的な思考の内でこそ、公理系「拡張」の特質をもまた、把握し得るはずである。

*1 共通講座・哲学

本稿の内容を先取りすれば、公理系の「拡張」と同義の 公理系の「特種化」は、フッサール自身の問題関心と深く関わっており、他方、公理系の「置き換え」は、ヒルベルトの考える「完全性」と密接な関係を有っている。 この関係は、実際に「複素数」への数領域の拡張において、新旧公理系の関係を扱う際の、二人の態度の相違へと関わってくる、という可能性を孕んでいるのである。

公理系の「変様」に関する区分は、『数理哲学草稿』の内で、三箇所に為されている。 第Ⅷ草稿に一箇所、第Ⅹ草稿に二箇所である。[2] このうち、フッサール自身の進むべき道が、第Ⅷ草稿には簡単に、また第Ⅹ草稿で後に置かれたものには詳細に、触れられている。 また、第Ⅹ草稿で先に置かれたものは、最も包括的で最も詳細な区分である。

我々は、公理系変様の諸場合を区分したフッサールの精緻な理論を追いつつ、最後に彼自身の立場へと到ることにしよう。

―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―

2．第Ⅷ草稿における区分

第Ⅷ草稿は、領域との関係において公理系を論じた草稿である。 ここにおける区分は、最も簡潔なものだが、必要な諸契機を全て含んでいる。 公理系の拡張を、第一に＜新しい操作や関係の付加＞という観点から見るということ、第二に＜数領域の拡張＞という観点から見るということ、この二つが基本的な契機である。 さらに、後者の内には、領域の拡張を媒介するものとして、＜公理系の拡張＞と、＜別個の公理系の構成＞という、両契機が含まれている。 見通しのため、区分の全般を、予め図にしておこう。[3]

- 1）操作ないし関係を付加
- 2）領域を拡張
  同一諸操作のもとで
  - α）公理系も拡張
  - β）公理系は拡張できない
    - γ）同一の公理系を保持
    - δ）新しい公理系を構成

詳しく見て行こう。

フッサールは、区分を――――

> ………我々は、区別のために二様のものを有っている。

という言葉で始める。「二様のもの」とは、区分のための二つの観点―――公理系の拡張と領域の拡張――という意味である。[4]

まず1）を見よう。 フッサールは――――

> 1）諸操作と関係諸形式とを通した[公理系の]拡張：除外される。

として、この場合を簡単に済ませる。

この＜場合＞とは、新しい諸操作ないし諸関係を付加する、という場合である。

「除外される」とフッサールが言うのは、それが原理的に不可能だからという訳ではない。 それがフッサールの研究対象からは外れる、というだけのことである。 フッサールの関心は、諸操作や諸関係そのものは一定のものに固定された上で、領域が拡張され、それに伴って公理系の方も拡張される、という事態なのである。 新しい数客観が導入されることに伴って、諸操作や諸関係を更に詳細に規定する諸々の法則が付加されることになる。 このレベルにおいても、公理系の拡張は起こる。 フッサールの関心は、ここに集中されるのである。

そこで、フッサールは今度は、「二様のもの」と言っていたもう一つの契機すなわち＜領域＞の方へ眼を向け――――

> 2）現実存在の諸命題を通した[公理系の]拡張、従って、領域 Gebiet の拡張 （同一諸操作の範囲 Sphäre の内部での）

として、新しい場合を挙げる。 そして彼は、領域の拡張と関係させた場面で、公理系の拡張を考えていく。 実は、この態度こそ、『数理哲学草稿』全体を貫く基本的な問題関心に起因しているのである。そして、諸操作と関係諸形式そのものの付加を「除外」した以上、考察は「同一諸操作の範囲の内部で」進められることになる。 フッサールは、この場合の内に、さらに二つの場合を区別する。

一つは――――

α）＜既に定義された諸現実存在の内で完結した領域＞が保持されている、ということのもとで、[当の公理系によって]完全に定義されている［という場合］。

である。フッサールの言う「相対的完全性」———公理系が特定の領域を規定する限りで完全であるということ———の場合である。領域の拡張に伴って公理系も拡張されることになる。フッサールにとっては、最も標準的な場合である。

他方、もう一つは————

β）領域の拡張が許容されるとしても、端的に、完全 perfekt に定義されている［という場合］。:［公理系の］拡張は、まさに、もはや可能ではない。

というものである。領域の拡張に公理系の拡張が伴わないという場合である。フッサールは———

さらに再度、二つの場合［が在る］。

として、この β）の内部を区分する。

一つは————

γ）公理系が同一 identisch に保持されるべきである［という場合］。

である。もとの領域に対して、公理系が言わば過大であった、という場合であろう。例えば、初めから実数の公理系を取れば、領域は、自然数のそれから実数のそれへと、順を辿って拡張が可能である。或いは例えば、＜平面とその外部に在る諸要素とから成る多様体＞から＜それらを含む空間＞への領域拡張は、同一の 3 次元公理系の内部で可能である。

問題は、もう一つの場合である。フッサールは————

δ）公理系が、ただ古い領域のためにのみ保持される［という場合］。ところが［この場合］、新しい諸客観が定義され、また一つの公理系が構成されて、＜この[構成された]同じ dasselbe 公理系は、古い領域への制限に伴って bei、古い公理系へと in 移行する＞というふうになる。しかし、＜このような［領域の］拡張が可能であるべきではない＞という意味での完全化 Perfektion は、要求されるべきではない。

と記す。

極めて理解しにくい記述である。この δ）という＜場合＞は、2)の内部に在り、また「新しい諸客観が定義され」るのだから、この「場合」の内では、領域が拡張されるのは明らかである。他方、同様に β）の内部に在って、公理系の拡張はもはやできないのだから、ここで「構成され」る公理系は、＜もとの公理系の拡張ではないような公理系であって、しかも、より広い領域を規定する、そういう公理系＞である。さらに奇妙なことに、この公理系は、もとの狭い方の領域に適用が限定される場合には、もとの公理系へと還帰する、というのである。

我々がいま見ている第Ⅷ草稿に先立って、第Ⅶ草稿(5)の内に、次のような記述がある。

……… 公理系が拡張されるべきでないという場合には、領域は、古い公理系を演繹的に自らに含む公理系を介して［拡張される］ということに、おそらくなるだろう。このような仕方で、確実に、如何なる領域も拡張され得ることになる。例えば、2次元のユークリッド多様体は、n 次元の多様体へと……。(6)

というものである。この記述は、領域の拡張と同時に「次元」が高まるような場合を念頭に置いている。算術の内部で考えれば、例えば、実数から複素数へと領域を拡張すると同時に、複素数を＜二実数の順序対＞として定義する、といった手続きには、この記述は、極めてよく当てはまる。2 次元の公理系は、1次元の公理系を「演繹的に自らに含む」と見ることができる。

δ）の引用に戻ろう。「このような拡張が可能であるべきではないという意味での完全化は、要求されるべきではない」とは、如何にも以って廻った言い方だが、要するに、「このような拡張も可能たるべきである」ということである。ここに言う「拡張」は、＜公理系の拡張＞では在り得ず、＜領域の拡張＞である。引用中に補った所以である。領域を拡張する際に、公理系の拡張とは違った公理系の変様方法が在る、ということである。それがまさに「古い公理系を演繹的に自らに含む」公理系を構成するということなのである。

さっき見た第Ⅶ草稿の内にも、別の箇所に、このような公理系の二様の扱いを意識した記述が在る。フッサールは、そこでは、「論理的に＜より包括的＞」な公理系という言い方をも併せてしている。覚え書きのメモといった体裁をしており、文章にはなっていないが、参考として引いておこう。すなわち

————

純粋数学における問題：公理系。拡張。＜より大きい＞公理系、或いは、＜古い公理系を、演繹的(論理的)に包括しつつ、演繹的に自らの内に含む、そういう公理系＞。客観の体系、多様体。より広い多様体。それ[より広い多様体]の公理系[は]、＜より大きい＞か、或いは＜論理的により包括的

である＞か、いずれか［である］。(7)
というものだが、ここで言う＜より大きい＞とは拡張された公理系についての表現であり、＜古い公理系を、演繹的（論理的）に包括しつつ、演繹的に自らの内に含む＞とか＜論理的により包括的である＞とかというのは、当面のδ）におけるような次元を高めた公理系についての表現である。

もう一度δ）の引用に戻ろう。「古い領域への制限に伴って、古い公理系へと移行する」とは、どういうことだろう。先の例で考えよう。二実数の順序対として定義された複素数の公理系においては、和と積および相等性が新たに定義されているが、大小関係は定義されていない。そこで、順序対（ａ，ｂ）において、我々がｂ＝０という型の諸数（a_1, ０），（a_2, ０），……… のみを考えれば、我々は、元の実数の領域に限定して複素数の公理系を適用することになる。その際に我々は、複素数の公理系によっても、少なくとも実質的には、もとの実数の公理系と同様の四則演算を為すことができ、もとの実数の公理系と同様の相等関係に諸数を従わせることができる。しかし、我々が、諸数を大小関係にもまた従わせようと思えば、二実数の順序対という形を離れ、例えば「写像」を通して、言わば＜はだか＞の諸実数　a_1,　a_2, ……… の領域へと移行しなければならず、公理系においてもまた、もとの実数の公理系へと移行しなければならないであろう。

いずれにせよ、このδ）に記されている状況は、後の第Ｘ草稿における区分の内でも取り上げられている。そこではフッサールは、公理系の「置き換え」という語を用いて、区分の重要な一場面を示している。後に、その箇所で触れることにしよう。

—・—・—・—・—・—・—・—・—・—・—

３．第Ｘ草稿における包括的区分

次に我々は、公理系の様相変化に関するフッサールの最も包括的な分類を見よう。ここでは、公理系の「変様」Modifikation という、最上位概念が導入される。これの下に、公理系の「特種化」と、公理系の「置き換え」とが、区別される。

変様
- 特種化
- 置き換え

前者、公理系の「特種化」は、普通には公理系の「拡張」と呼ばれるものの、フッサール的な表現である。ここには、諸公理を付加することが、もとの公理系を特種化することになるという、フッサール固有の把握が在る。後者、公理系の「置き換え」は、諸公理の単なる付加ではなく、公理系そのものが、そっくり交換されるような、変様の形態である。何れも、実質的には、我々が既に第Ⅷ草稿の内で見たものである。

—・—・—・—・—・—・—・—・—・—・—

３．１．公理系の「特種化」→

まず、フッサールが公理系の「特種化」と呼ぶ変様を見ていこう。(8)　予め区分の全体構造を図に示す。↙

Ｉ．特種化
- １）本質外的特種化
  古い公理系とは無関係な諸公理を付加
- ２）本質的特種化
  - ａ）外的特種化
    旧諸操作と結合した新しい諸操作を導入
  - ｂ）内的特種化
    同一諸操作のもとで
    - α）新しい操作諸法則を通して
    - β）開かれた諸場合を規定 ⟶ 最も完全な内的特種化
      ↓
      最も完全な特種化

↙公理系の拡張が、同時に公理系の特種化である、ということについて、フッサールは———

諸公理が境界付ける形式的な＜類＞概念は、諸公理が保持された下で、様々な仕方で特種化し得↗spezialisierbar る………。我々は＜諸公理Ａに対応する諸客観＞の或る多様体を有っている［とし

> よう]。 我々がもし、諸公理＜ＡとＢ＞を充足する多様体の概念を形成するならば、この概念は、一つの＜種＞概念 Artbegriff である。(9)

と記している。

フッサールのこの考え方は、公理系と公理系との関係を、概念と概念との＜内包＞関係になぞらえる、という発想に由来している。「動物」という類概念に対して、「犬」という概念は種概念である。 前者が有する普遍的な内包［A］は、後者もまた保存している。 しかし、後者はさらに、「犬」に固有の特殊な内包［B］をも有している(10)。 公理系の拡張とは、もとの公理系 A に対して、新たに諸公理 B を付け加えることである。 これを同時に、フッサールは、公理系の「特種化」として把握するのである。

本質外的特種化

さて、「本質外的特種化」とフッサールが表題を付した一場合を見よう。 フッサールは――――

> 1）本質外的(形式的)な特種化、そして、この表題の下に把えられて、次のような場合。 すなわち、――――根源的に定義する諸公理に、ただ次のような諸公理、すなわち＜その内で、完全に新しい諸連結と諸関係が定義され、しかも、古い諸公理には無関係な、そういう諸公理＞のみが、付け加わる――――という場合。 例えば、＋，－ 等の諸操作に並んで、なお或る一つの ⊕ が、＋－等のうちの何ものをも含まない操作諸法則と共に導入される、という際のように。(11)

と記す。

ここには、公理系拡張の一般的な自由性とでも呼ぶべきものが、表現されている。 古い諸公理とは「無関係な」諸公理が付加される、ということに関して、フッサールの考え方がよく分かる記述が在る。フッサールは、第Ⅷ草稿の内で――――

> ともかく、ここで次のことが注意されなければならない。 それは、如何なる種類の完結諸公理 Schließungsaxiome も付け加えられないならば、或る多様体の形式的な定義において、全ゆる状況の下で、諸々の可能性が開かれたままである、ということである。 既に定義されたものとは無関係な・新しい関係や連結の諸方式の可能性が、つねに開かれたままである。 ………［中略］……… 従って、諸公理の拡張は、如何なる完結公理………も付け加えられていない場合には、つねに可能である。(12)

と記している。

「既に定義されたものとは無関係な・新しい関係や連結」を導入した公理系の内では、もとの公理系との間で、必然的な連関が絶たれている。 このような仕方での「自由」な公理系拡張は、確かに可能ではあるが、この「自由」性がまた、フッサールをして、それを「本質外的」と呼ばせる所以でもある。この種の公理系拡張は、フッサールにとって、考察の対象には初めからならない。

この「自由」は、「完結公理」が導入されない限り、制限されない。 ここに「完結公理」というのは、フッサールの言葉をそのまま用いれば、「更なる関係や連結の諸方式は、如何なるものも、妥当するべきではない、ないしは考慮に入って来るべきではない」(13)ということを意味する一つの公理であり、言わば、公理系の拡張を随意に終結させることを宣言する公理である。 フッサールは、これには全く興味を示さない。 フッサールが求めるのは、公理系が領域との関係において拡張の限界に必然的に突き当たるような、「内的な完結」である。

本質的な特種化

そこで我々は、フッサールが――――

> 2）本質的な特種化

という表題のもとに為す、次の区分へと進もう。 彼はこれを――――

> a）外的な特種化。 新しい諸操作が導入されるが、しかし新旧の諸操作を結合する verbinden 操作諸法則を通してである。
>
> b）内的な特種化。 如何なる新しい操作も導入されないが［同一諸操作のもとで］、しかし、＜開かれたままになっていた＜操作の諸場合＞或いは＜操作諸関係のための一般的諸法則＞＞が公理的に定置され festgelegt る、という限りで、古い諸操作が、より詳細に規定される。

として、二つの場合に分ける。 この a）とb）との区分は、＜操作・関係そのもの＞のレベルと＜それらに付随する諸法則＞のレベルとの区別に関わっている。

本質的・外的な特種化

a）は、新しい諸操作を、もとの諸操作から定義しつつ公理的に導入する、という場合である。 先の1）とは異なって、この場合は、もとの公理系との必然的な連関が保たれている。 フッサールが「本質的」として分類している所以である。 ただ、新しい諸操作が「外」から付加されるがゆえに、「外的」という名が付されているが………。

公理系のこのような「特種化」は、数学の内では

頻繁に行なわれることであり、数学が内容豊かな学として成立するのも、これに多くを負っている。 代数学の範囲内で手近な例を見ても、＜行列＞を構成し、実数の一般的な演算・相等関係に関係付けつつ、新しく和・積・相等性を定義し、それに伴う計算規則を新たに定める、といったことは、この a）による「特種化」の典型である。

それにも拘わらず、フッサールの関心は、ここにも無い。 先に第Ⅷ草稿における区分を見た際に、フッサールが「除外される」と付記していた一場合——「操作と関係諸形式とを通した[公理系の]拡張」——が在った。 さっき見た「本質外的特種化」もそうだが、当面の「本質的・外的な特種化」も、これに該たる。 フッサールの関心は、もっと限定された場面に在る。

本質的・内的な特種化

彼が実際に取るのは、b）の道である。「同一の操作のもとで」というフッサールの原則的立場、これに我々は、先に見た第Ⅷ草稿の内で、既に出会った。 そこでは、「除外」されなかった——フッサールの関心に沿った——区分の方に、これが付されていた。 後に我々は、第Ⅹ草稿における再度の区分の内でも、これに出会うことになる。 b）の「内的特種化」とは、まさにこれに付された名称なのである。

「内的」というのは、新しい操作や関係が「外的」に付加される訳ではないということ、既に定義されている諸操作の＜内部＞で、それら諸操作をより詳細に規定することを通して、公理系の特種化が図られるということ、を意味している。

b）の内には更に——

> α）諸操作の特種化を通した内的な特種化。一つの操作は、それの操作諸法則を通して定義されている。 諸操作は、新しい操作諸法則を通して特種化される。…………
>
> β）＜開かれたままになっていた＜操作の諸場合＞を、＜存在諸命題 Existenzialsätze＞と＜これら新しい諸量のための補完的な操作諸規則＞を介して、固定すること Fixierung＞を通した、内的な特種化。

が、区分される。

α）は——

一般的な諸操作が、それらに付随する下位の諸法則の導入によって、さらに特種化される、という場合である。 公理系が、新しい操作（ないし関係）そのものを導入することを通して「特種化」される、ということに関しては、我々は既に見た。 これと同じことは、下位の諸法則のレベルにおいても起こる。ここでは、「内的な特種化」が為されるのだから、それは、一定の諸操作の内部で、それらの何れかを詳細に規定する何らかの規則が、新しく付加される、ということによる。

ここでは、公理系の特種化を主導するのは諸法則であって、領域の拡張ではない。 領域の拡張は、ここでは度外視されている。 例えば、通常の加法に、これを特種化する法則として、1＋1＝1 という計算規則を付加すれば、我々は、通常の加法と乗法から成る公理系を「特種化」したことになる。 これは、ブール代数が実際にすることである。 ここでは、第二分配法則 a＋（b×c）＝（a＋b）×（a＋c）も導出され得る。 しかし、領域はむしろ、0と1だけに縮小される。

β）は——

領域の拡張が公理系拡張を主導する、という場合である。 ここに言われる「存在命題」とは、新しい数客観の存在を定義・主張する命題のことである。 これを通して、数領域の拡張が生ずる。

「開かれたまま」とは、数客観の定義が不足しているために、或る場合には何らかの操作の遂行が制限を受ける、という事態のことである。 方程式を解くための操作として機能すべき際ならば、この場合は「解を有たない」ということになる。 必要な客観定義の不足を補う存在諸命題が定立されるに伴って、これら新しい諸客観を操作する際の下位諸法則もまた付加される。 このようにして、公理系は、特種化されることになる。

この一場合は、フッサール自身の問題関心から見れば、最も重要な一場合であり、彼の「多様体」理論全体を貫く基本的な主題と関係している。 第Ⅹ草稿の内で彼自身の取る道を示したもう一つの区分を見た後で、振り返ることにしよう。

決定可能性と拡張不可能性

さて、先へ進もう。 さらに、公理系の「完全性」に関わる二つの記述が、——おそらく、いまの β）の延長上に——付け加えられている。

一つは——

> 最も完全な内的特種化 ： 何れの客観も、相関的 relationell に、従って諸操作を通して、一義的に規定されており、如何なる操作も、また＜操作および関係＞の如何なる諸法則も、この一義的な規定のために欠くことができない。

というものである。

ここに示されている「全ゆる諸客観の一義的規定」とは、「開かれた」場合が全く無いということ―――公理系の「決定可能性」―――を意味する。　先のβ）には、開かれたままになっていた＜操作の諸場合＞を、領域の拡張と公理系の拡張とを通して規定する、という手続きが示されていた。　この手続きは、「開かれた」場合が現われる度に、繰り返し進む。　いま見ている「最も完全な内的特種化」は、この過程を導く一つの理念として機能するのである。

さらに、もう一つの完全性について―――

> 最も完全な特種化 ： α）如何なる新しい諸定式も、もはや可能ではなく、如何なる新しい操作諸法則も、付け加え得ない。　β）＜根源的で、導出されたのでない、そういう種類の存在諸命題＞を通して固定された諸＜量＞にとって、如何なる特殊な操作諸法則も、指定し得ない。　このことの内には、既に一義性が存している。　なぜならば、もし仮に本質的な多義性が存立しているとしたならば、指定 Vorschrift を通して一義性が形造られ得ることになるであろう、からである。

と、フッサールは記す。　この記述は、操作諸法則の＜拡張不可能性＞を示している。

いまの β）に示されている「根源的」な諸客観とは、諸々の実数や虚数単位 i といった、算術にとって最も基本的な諸客観を指す概念である。　ここまで拡張された領域に対して、それを規定する公理系を更に拡張することはできない、という場面が、ここでは示されているのである。

先に見た「決定可能性」は、この「拡張不可能性」と、実は同値である。　当の公理系が諸客観を一義的に規定しているときに、一定の操作のために新たな下位諸規則を付加することは、諸客観を二義的に扱うことであり、その操作の諸結果に矛盾を生ぜしめる。　他方、公理系の拡張不可能性が諸客観の一義的規定を含意することは、いまの β）の記述の内に含まれている。　フッサールがそれらに異なる表題を付しているのは、両者の機能的な差異が考慮されているからである。　フッサールは、領域と公理系の拡張を導く理念を、「決定可能性」の面から表現している。他方、この理念が実現された結果を、フッサールは「拡張不可能性」の面から表現しているのである。

同じ引用中、α）の方には、拡張不可能性が、領域との関係を抜きに、言わば絶対的に示されている。それはおそらく、領域を拡張するとしても、公理系を拡張することはできない、といった事態を意味するのであろう。　例えば、実数から複素数への領域拡張は、ハミルトン的表現―――二実数の順序対―――を採った場合には、２次元化された新しい諸客観が構成される。　このような領域拡張に伴う公理系の変様は、公理系の「拡張」として把握することはできない。　実数の公理系は、この意味では、「拡張不可能」である。

何れにせよ、公理系の拡張が不可能な場合に、敢えて領域を拡張しようとすれば、我々は公理系そのものの交換―――「置き換え」―――へと、進まなければならない。

―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―

３．２．公理系の置き換え→

公理系変様のもう一つの型を見よう（１４）。
同様に図を付する。↙

Ⅱ．置き換え
- α）同値の公理系によって
- β）より包括的な公理系によって
  - 一般（領域の変化を度外視）
  - γ）特に領域の拡張（ないし縮小）を伴って ――― Cf. 完全な公理系（ヒルベルト）

↙フッサールは、―――

> Ⅱ．一つの公理系は、特種化を通してのみ変様され得るという訳ではない。　ここで重要な諸可能性は、次に述べる通りである。

として、特種化以外の変様を示し始める。

＜より包括的＞な公理系

これをフッサールは、まず―――

↗

> α）本質外的な変化 ： 同値なものが、或る同値なものによって置き換えられる ersetzt。
> β）公理系が、或る他の公理系―――そこから、もとの公理系が帰結するが、しかし、それとは、もとの公理系は同値ではない、そういう公理系―――によって置き換えられる。

という、二つの場合に区分する。 この段階では、領域という観点は、今だ導入されていない。

α)については、特に云々する必要は無い。 例えば、虚数単位 i を導入した複素数の公理系と、ハミルトン的表現における複素数の公理系とは、若干の補正を施せば、互いに同値であり、互いに置き換えることができる。

β)が、理解しにくい。「そこから、もとの公理系が帰結する」公理系とは、「もとの公理系を演繹的に自らに含む公理系」ということを意味する。 或いは別の言い方をすれば、「論理的に＜より包括的な＞公理系」のことである。 このような＜高次元化＞された公理系の概念は、我々が先に第Ⅷ草稿における区分を見た際に、δ) という一つの場合を機縁にして、既に考察したものである。

この第Ⅷ草稿のδ)は、一つの新しい公理系が構成されるが、もとの領域に対してはもとの公理系へ還帰する、という場合であり、高次元化された公理系がそれの典型として考えられてよいものであった。 そこでは、公理系の高次元化が、領域の拡張と同時に為される、という場面が考えられていた。 これに対して、我々がいま当面している「置き換え」のβ)という型は、領域という観点とは別に、ただ論理的な高次元性という観点だけに従ったものである。 いま、ここに領域という契機が加われば、それは、先の第Ⅷ草稿におけるδ)と同じものになる。

領域の拡張
―――ヒルベルトの「完全性公理」

そこで、フッサールは、このβ)型の置き換えにおいて、それが領域の拡張(ないし縮小)に関わる場合について、特に項目を立てて―――

> γ) 公理系が、β)におけるのと同様にして、しかし、＜領域がもっと広いものである＞という仕方で、或いは逆に、＜領域がもっと狭いものである＞という仕方で、変更される。

とする。 公理系が論理的に＜より包括的＞になる場合なのだから、領域は実際には拡張されることになるはずである。 ここでフッサールは、「逆に、領域がもっと狭いものであるという仕方で……」と記して、領域の縮小に関しても言及しているように見える。 しかし、状況は、先の第Ⅷ草稿のδ)におけるのと同様である。 この表現は、もとの狭い方の領域に限定された固有の操作・関係が必要とされる場合に、新しい公理系から、もとの公理系へ還帰する、という事態を意味するのだろうと思われる。

これに直ぐに続いて、極めて重要な記述が在る。 フッサールは―――

> ………領域の拡張が、公理系の一つの変更を通してのみ可能である、という場合、ということはすなわち、外的な諸公理の単なる併置を通しては生じ得ない、という場合、[この公理系は]＜完全なvollständig公理系＞(ヒルベルト)[である]。

と記す。 フッサール自身がヒルベルトに言及した、数少ない記述の一つである。

ここで考えられているのは、具体的には、実数の公理系に関するヒルベルトの「完全性公理」である。 ヒルベルトによれば、実数領域の拡張とともに、実数の公理系を拡張して、しかも、もとと同じ四則演算と順序(大小)関係を維持することはできない。 複素数への領域拡張は、公理系の拡張ではなく、公理系の置き換えに依らなければならない、ということになる。

公理系拡張の限界に関するこの概念規定そのものは、一般的な意味では、フッサールにも共通するであろう。 フッサールにとっても、領域の拡張に伴って構成される公理系が、もとの公理系の拡張としては在り得ない、という場合には、公理系は、全く新たなものに置き換えられなければならない。

ただし、具体的には問題が残る。 「拡張」の構造に関するフッサールの把握の仕方によっては、複素数への領域拡張を公理系の拡張に媒介させることが、不可能ではない。 フッサールの考える公理系の「完全性」が、ヒルベルトのそれと同じ具体的な場面に、必ず現われなければならない、というものではない。

―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―

4．第X草稿における再区分
――フッサール自身の道

フッサールは、第X草稿において、既に見たように初めに最も包括的な区分を為し、さらに、別の基準から再び区分を為している。 しかも、この区分は、同時に彼自身の取る道を自ら示しつつ為されているという点で、極めて重要なものである。 我々は既に第Ⅷ草稿における区分の内で、「除外」される場合の存在から、フッサールの問題関心を或る程度は限定することができた。 これから見る区分の内で、我々は、これを確認することができるとともに、公理系の変様に関するフッサール自身の思考方法を、顕在的に明らかにすることができるだろう。

ここでも、理解の助けとして、区分の構造を予め示しておく。(15)

フッサールが取る道を予め示せば、彼は―――
まず b) を採る。 そのうちでも β) を採る。 さら

→

には（後の方のａ,ｂでは)、ａ）の内部で、ｂ）が不可能になるところまで進む。―――ということになる。↙

変様
- ａ）諸連結・諸関係の個数を変更する
- ｂ）同一の諸連結・諸関係のもとで、それらに関する諸法則を変様する
  - α）諸法則を変更・交換する
  - β）新しい諸法則を付加する
    - ａ）領域の拡張を伴う
    - ｂ）領域の拡張を伴わない

↙さて、フッサールは―――

> 多様体の理念は、次の場合に変様される。

として、第Ｘ草稿における再度の区分を始める。

この区分においては、フッサールは、先のように「変様」を「特種化」と「置き換え」に二分するのではなく、これらを以下の場合分けの内に分散して組み込んでいる。以下、フッサールの記述を引きながら、詳しく見て行こう。

二つのレベル ―――操作・関係と、下位の諸法則

フッサールは、まず―――

> ａ）これら諸連結や諸関係の［個］数を変ずる ändern 場合、
> ｂ）我々が＜与えられた諸連結および諸関係［そのものの個数をは変ぜず、これら］に付随し、それらを形式的に定義する、そういう諸法則＞を＜変様＞する場合、………

と、大きく二つに区分する。フッサールは、＜連結・関係そのもの＞のレベルと＜それらに付随する下位の諸法則＞のレベルとの区別を、初めから働かせるのである。

ａ）は、要するに、四則演算等の＜操作＞や相当・大小の＜関係＞という公理系の根幹に関わるレベルにおいて、諸公理を廃棄あるいは付加したり諸公理を交換したりすることである。

この一場合は、先に見た第Ｘ草稿における初めの区分のうち、三つの場合を、同時に包括している。第一に「本質外的」な特種化、第二に「本質的」だが「外的」な特種化、そして第三に、諸公理の交換――公理系の「置き換え」―――が、操作・関係そのもののレベルで生ずる場合、である。もっとも、これらは全て、後に見るように、フッサール自身が取る道からは外されるのだが………。

ｂ）は、公理系の＜変様＞を、四則演算等の＜操作＞や相当・大小の＜関係＞というレベルで行なうのではなく、これらには手を付けずに、これら操作や関係を詳細に規定する諸々の＜法則＞のレベルにおいて行なう、というものである。与えられた諸操↗作・諸関係の「内部」で考えるというフッサールの枠組みに、我々はここでも出会うのである。ただし、ここではまだ、内的な「特種化」だけに限定されているのではなく、言わば内的な「変様」一般が考えられている。そのことは、この場合の内に更に区分された次の二場合を見れば分かる。

下位諸法則の交換と付加

フッサールは更に、このｂ）の内部を二つに区分する。ここで、操作・関係に付随する下位の諸法則について、言わばこのレベルにおける「置き換え」と「特種化」とが、区別されるのである。「その際に」として、フッサールは続け、―――

> α）我々は、数の諸法則を＜変様＞することができ、ないしは、我々が排除した諸法則に替えて、他の形式を有った他の諸法則を採用することができる。
> β）［或いは―――］我々は、既に受け容れられた諸法則を保持して、それらに新しい諸法則を付け加える、ことができる。

と、二つの可能性を示す。

α）は、若干理解しにくい。これは、先に見た第Ｘ草稿における初めの区分の内には現れなかった一つの場合である。或る公理系が定義している操作や関係は、それらを詳細に規定する諸々の規則を通して更に「特種化」される、ということは、先に見た。このような「特種化」が幾つかのオールターナティヴを有する場合、その一つから別の一つへと移行するといったことを、フッサールは考えているのだろうと思われる。このタイプの公理系変様は、下位諸法則のレベルで起こる公理系の「変更」ないし「置き換え」に他ならない。

これに対して β）は、諸操作や諸関係の下位に在る諸規則に関して、α）のようにそれらを他のものに変更するのではなくして、純粋に新しい下位規則を付け加える、という場合である。ここまで来てようやく我々は、先に「内的」な「特種化」と呼ばれ

ていた一場合に達する。 同一の諸操作・諸関係のもとで、ただ下位諸法則の付加のみが為される場合が、「内的特種化」なのである。

フッサールの道

さて、ここまで区分を進めた段階で、フッサールは、自らが取る道を示す。 フッサールの思考方法を知りたい我々にとって、最も注意すべき記述である。

フッサールはまず、――――

> 我々は、明らかにただ一つ重要な、或る＜場合＞を定める。 ＜或る多様体が、確固とした個数における一定の諸連結と諸関係――――これらを定義する一定の諸公理と共に――――を通して、性格付けられる＞という＜場合＞である。 いまやこの＜多様体-理念＞が、更に整えられ・更に規定されるべきである。[16]

と記す。 要するに、「確固とした個数における一定の諸連結と諸関係」を前提して考える、ということである。 すなわち、フッサールが最初に区分けした a) と b) とのうち、b)を取る、ということなのである。 第Ⅷ草稿で我々が見たこと、そして、第Ⅹ草稿での先の包括的区分においても、我々がそれに従って考えてきたことが、ここで確認される。 第Ⅷ草稿においてフッサールが、「1）諸操作と関係諸形式に関する公理系の拡張」を「除外」して、「(2) 領域の拡張」の方を取った際に、彼は「同一諸操作の範囲の内部で」という理わり書きを付していた。 このことの基底に在るものを、第Ⅹ草稿のこの場所で、彼は言葉にして示しているのである。

このb) は、さらに、α)［下位諸法則の交換］と、β)［下位諸法則の付加］とに、区分されていた。 続きを見よう。 フッサールは、――――

> ………… 我々は、この理念［そのもの］を変様すること――――この理念の内容を部分的に廃棄するような変様――――を排除する。 従って、諸々の法則は、存立し続けるべきである。 新しい諸法則を幾つか付加することのみを、我々は許容する。[17]

と記す。

このことは、β）の方をフッサールが取る、ということを意味する。 α）においては、下位諸法則の一部を差し替えることによって、公理系の＜置き換え＞が生じている。 諸法則が純粋に追加されることが、公理系の＜特種化＞であり、公理系の＜拡張＞である。 フッサールが自らの問題関心を通して求めるのは、こちらなのである。

ここまでで、フッサール自身の考える「公理系の拡張」が、どのような形を取るのかが分かる。 もとの公理系における諸連結（諸操作）と諸関係を、そのまま保存する。 その上で、これらに付随する下位の諸法則について、もとの公理系に在ったものを保存し、さらに新しい下位の諸法則を付け加える、ということである。「内的な特種化」とは、これなのである。

残るのは、これが領域の拡張と結び付けられることである。

領域拡張との関係

さて、フッサールは――――、

> そこで我々は、更に区別を為さなければならない。

として、いまのβ）の場合の内に、――――

> a） 既に定義された諸法則の諸拡張は、［各々］一つの領域を境界付ける **umgrenzen**。 新しい諸命題を通して、新しい諸客観が定義される［領域が拡張される］。 すなわち、＜新しい諸命題によって、既に定義された諸客観から区別される、そういう諸客観＞が、である。
>
> b）固有の［それだけの］特種化、［領域の］拡張を伴わない内的な特種化。

という二つの場合を区別する。 この段階で初めて、「領域」という契機を、フッサールは区分の場に導入することになる。

a）は、諸法則の付加による公理系の拡張が、数領域の拡張に伴って為される、という場合である。ここに言われる「新しい諸命題」とは、フッサールがしばしば「存在諸命題」と呼ぶもので、新たな数・諸客観を定義しつつ・それの存在を主張する諸命題のことである。 他方 b）は、同一の数領域を保持しながら、諸法則の付加のみを行なう、という場合である。

ここでの a）とb）とは、何れかが選ばれなければならない、という意味での区分けではない。 実際には、b）が不可能である局面が現われるまで、a）の過程が進む。 b）は、それが不可能であるという場面を示すために、特に想定された一場合である。 直ぐに続けて、この間の事情を――――

> ［領域の拡張を伴わない］内的な特種化は、――――我々は要求するが――――いまや、可能たるべきではない。 同一の諸客観にとって、境界付けられた領域の諸客観にとって、［――――我々は要求するが――――］如何なる新しい諸公理も、付け加えられるべきではない。[18]

と、フッサールは記す。 言い廻しの奇妙さゆえに若干分かりにくいのだが、フッサールの言いたいことは、＜b）のような 領域拡張を伴わない「内的特種化」が 不可能となることを、我々は求める＞ ということである。

この記述はミスリーディングなほど省略されたものだが、フッサールはここで、先の包括的区分の内で「特種化」の最後に触れられた「完全性」の場面へと、実は一機に進んでいる。 b)は、完全な特種化という理念に関わっているのである。 このことは、フッサールがこの引用に直ぐに続けて――――

我々が諸々の拡張を排除する際には、なお一つの規定のみが存在する。多様体の理念を変更せず、ただ＜質料化＞する materiesieren、そういう規定が、である。(19)

と付け加えている、ということから分かる。この「質料化」という語は、公理系の拡張―――特種化―――が、領域の拡張を伴いつつ進み、限界に達したという場面において、特に現われてくる語である。 フッサールが主題とする公理系の「特種化」は、形式に関する特種化である。 これに対して、何れの公理系も、多様な適用対象を有し、その限りで様々に「質料化」され得る。 この意味での「特種化」のみが可能であるという局面、それは、公理系の形式に関しては、更なる特種化が不可能であるという場面、すなわち公理系の拡張不可能性が現われる場面なのである。

いよいよ我々は、フッサール自身の取る道を、フッサール自身の言葉を通して、最終的に知ることができる。 それは、β)に示された「内的特種化」が、a)によって導入された＜領域の拡張＞という契機と結び付けられたところ、すなわち＜領域拡張に伴う内的特種化＞の上に在る。 そして、この過程を、b)が不可能となるところまで進む、ということが、フッサールの取る道なのである。

「想像的なるものを通る通路」

ここで、同じ第X草稿における先の包括的区分を振り返って、いま我々が知ることのできたフッサールの道を、それの内に探してみよう。 そこにおいて「内的特種化」という概念が現われたのは、2)本質的特種化 の一場合 b)においてであった。 さらにこれに加えて「領域」概念が導入されたのは、この「内的な特種化」の内に区分された一つの場合――β)＜開かれたままになっていた＜操作の諸場合＞を、＜存在諸命題 **Existenzialsätze**＞と＜これら新しい諸量のための補完的な操作諸規則＞を介して、固定すること＞を通した、内的な特種化―――においてであった。フッサールの取る基本的な進路に、先の包括的区分の内で対応するのは、この一場合なのである。

フッサールは、このように、彼自身の立場を示す決定的に重要なこの場面において、「存在命題の付加」すなわち 領域の拡張 ということを、「開かれたまま」であった操作を規定する、ということに結びつけている。 このことは、フッサールの「多様体」論の上で、一つの本質的な点を表現している。 一定の操作の遂行は、客観の定義が不足しているがゆえに制限を受け、従って「開かれたまま」という事態に直面する。 その度に、公理系は「想像的なるもの」に突き当る。「負数」、「分数」、「無理数」―――フッサールの場合、代数的数の範囲内で―――、そして「虚数」は、何れも、次々に現われる「想像的なるもの」である。 これらを、＜現実なもの＞として、その都度繰り返し操作体系に取り込むことこそ、一般に、数領域の拡張とそれに伴う公理系の拡張―――特種化―――とを導く動機であった。 公理系の拡張が進むこのような過程のことを、フッサールは、「想像的なるものを通る通路」**Durchgang durch das Imaginäre** と呼ぶ(20)。 この過程は、もはや「開かれたまま」という事態が現われなくなるまで進む。そして、この過程を哲学的に基礎付けることこそが、フッサール「多様体」論の基本的な問題関心なのである。

5．おわりに

我々は、公理系変様の諸相に関して、フッサールの緻密な思考によって各々の観点から為された、三通りの区分を見てきた。 そして、それら諸区分を通して、フッサール自身の取る道が、領域拡張に伴って為される「内的特種化」ということの上に在る、ということを知ることができた。

この道が完全に辿られ尽くしたところに、公理系の「決定可能性」ないし「拡張不可能性」が、言わば絶対的な意味で現われてくる。 この事態は、いままで見てきた三通りの区分の何れにおいても、フッサールによって各々の仕方で語られている。

しかし、これらに関して筆者が加えてきたコメントは、実は、或る一つの「ドグマ」に基づいていた。それは、最後に現われる「想像的なるもの」―――「虚数」―――を、フッサールは如何に把握しているのか、ということに関わる。 実数の公理系に関するヒルベルトの「完全性公理」―――従って、実数の公理系の「拡張不可能性」―――については、先

に触れた。これに対して、フッサールならば、ハミルトン的表現による複素数については、ヒルベルトと同様に公理系の「置き換え」として把握するであろうが、他方、虚数単位 i を導入するタイプの複素数については、公理系の「拡張」として把握するであろう。この「ドグマ」は、しかし、筆者の独立した他の一考察に基づいている。本『紀要』本号別稿（21）は、この問題を扱うことになろう。

注

1 フッサーリアナ第XII巻には、『算術の哲学』第二巻の準備稿を含めて、数論の基礎を探求した１０編の草稿が収録されている。これを、『数理哲学草稿』と呼ぶことにしよう。

2 拙稿で主題として扱う二つの草稿には、次の表題が付されている。第VIII草稿「公理系の領域／公理系――操作体系」、第X草稿「多様体の形式的規定について」

3 第VIII草稿における区分の引用箇所を、一括して示す。
Husserliana,Bd.XII,S.473,Z.36-S.474,Z.13.
以下、区分そのものを表現する引用は、他の付随的な引用から区別するために、左右を点線で囲う。

4 「公理系」は、操作・関係に関する諸公理と、客観を定義する存在諸命題とを、含んでいる。しかし本稿においては、これら両者の機能の相違に着目して、「拡張」ということに関わる限り、操作・関係に関する諸公理の付加を「公理系の拡張」と言い、存在諸命題の付加を「領域の拡張」と言うことにする。

5 第VII草稿には「確定性と公理系の拡張とについての三つの研究」という表題が付されている。

6 Husserliana,Bd.XII,S.455,Z.24-Z.29.

7 Husserliana,Bd.XII,S.456,Z.26-Z.30.

8 第X草稿における当該区分のうち、「特種化」の分について、引用箇所を一括して示す。
Husserliana,Bd.XII,S.494,Z.10-S.495,Z.4.

9 Husserliana,Bd.XII,S.493,Z.29-S.494,Z.4.

10 ここでは、「特殊」besonder という本来の語に依った。本稿では、一般に、フッサールの用いる spezial という語を「特種」と訳し、同様に Spezialisieren という語を「特種化」と訳す。いずれも、フッサールが多用する「スペチェス」（種）Spezies という語に深く関わっている。なお、先の引用には Art という語が用いられているが、本質的には差異は無い。

11 「連結」と訳した Verknüpfung という語を、フッサールは「操作」Operation と同義に用いる。何れも演算のことである。

12 Husserliana,Bd.XII,S.472,Z.25-Z.36

13 a.a.O.

14 先と同様に、「置き換え」の分について、引用箇所を一括して示す。
Husserliana,Bd.XII,S.495,Z.5-Z.16.

15 第X草稿における当該再区分の引用箇所を，一括して示す。
Husserliana,Bd.XII,S.496,Z.6-Z.16.
Husserliana,Bd.XII,S.496,Z.27-Z.32.

16 Husserliana,Bd.XII,S.496,Z.17-Z.21.

17 ibid.,Z.22-Z.25.

18 Husserliana,Bd.XII,S.496,Z.33-Z.35.

19 ibid.,Z.35-Z.38.

20 Husserliana,Bd.XII,S.440,Z.6 & S.443,Z.35.

21 フッサールの数理哲学（7）――「虚数」の問題――

Husserl's Philosophy of Mathematics 6 ―― 'Specialization' of an axiom-system ――

Kohtaroh NINOMIYA*

In this treatise we investigate several ways to modify an axiom-system in Husserl's theory of the axiom-system. Under 'modifying' of an axiom-system he differentiates 'specialization' and 'substitution' of an axiom-system. For both, the extension of the number-domain is an important moment. 'Specialization' of an axiom-system means by him 'Extension' of it. Husserl's main interest lies in the 'inner specialization', that is, specialization trough addition not of operations nor of respects themselves but of sub-ordered laws.

Keywords : extension of an axiom-system, modifying, specialization, substitution, sub-ordered laws, extension of the number- domain, phenomenology

* Common Subject Division